Inhoudsopgave

Opgave A

De erfenis van professor Sed Ilcue

Toen de bekende wiskundige Sed Ilcue deze wereld verliet, liet hij —naast een indrukwekkende lijst van wetenschappelijke publicaties— een verzameling van ongeordende aantekeningen na, de meeste van wiskundige aard. Twee wiskundigen, Ada L. en B. Pascal werden ingehuurd om deze ongepubliceerde wiskundige erfenis te onderzoeken, te structureren en uiteindelijk te publiceren.

Ze vonden allerlei soorten wiskundige uitspraken: sommige daarvan te begrijpen, andere niet; sommige mét bewijs en sommige weer niet. In één van z'n schriften zat een pagina, waarvan elke regel bestond uit een rij natuurlijke getallen. Er was niet het geringste vermoeden van wat de betekenis van deze rijen was. De eerste paar regels waren:

```
2 3 6
8 24 18 9 10 15 20 5 4 3 6 2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 18 20 21 22 24 26 27 28 30 33 35 36 42 ⟷
   ↪ 48 52 54 55 60 65 66
1 2 4 6 21
31 155 29 58 87 116 174 23 46 69 38 17 85 13 26 52 11 33 49 21 7 75 81 54 18 64 8
```

N.B.: De symbolen ⟷ en ↪ geven aan dat de betreffende twee regels één regel in het schrift voorstellen, dat wil zeggen: ⟷ + regelovergang + whitespace + ↪ dient als één spatie gelezen te worden.

Na een tijdje staren en peinzen, zag Ada het volgende patroon: de reciproken van de getallen op de eerste regel tellen op tot een geheel getal, want: $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$. Met behulp van pen en papier konden ze uitrekenen dat de som van reciproken van de getallen op de tweede regel ook weer een geheel getal was, namelijk 2.

Toen wees Pascal op de vierde regel. Ze moest toegeven dat het patroon niet opging voor deze regel (aangezien 21 het enige veelvoud van 7 in die rij was). Aan de andere kant was bekend dat de professor wat slordig was in de herfst van z'n leven. Misschien had hij wel 12 bedoeld in plaats van 21, of had hij vergeten 28 erbij te schrijven.

Pascal was niet overtuigd: op zo'n manier kun je alles wel in het patroon laten passen. Aan de andere kant: als de vierde regel de enige was die niet in het patroon paste, zou ze zomaar gelijk kunnen hebben. Helaas: de vijfde regel paste ook niet in het patroon.

Na dit gereken voelden ze er niet veel meer voor om de resterende regels met de hand te controleren, hoewel alle getallen kleiner dan 200 waren en maar steeds één keer per regel voorkwamen.

Z.O.Z.

Probleem

Schrijf een programma dat de beide wiskundigen helpt Ada's hypothese te verifiëren.

Invoer

Deze bestaat uit:

- één regel met daarop een positieve integer: het aantal runs;
- per run twee regels:

regel 1 bevat een integer in het bereik $[1..199]$: het aantal getallen op de te controleren regel in het schrift;

regel 2 bevat de getallen op een regel in professor I.'s schrift. Al deze getallen zijn gehele getallen in het bereik $[1..199]$ en komen elk hooguit één keer voor. Getallen worden steeds door een enkele spatie gescheiden.

Uitvoer

Voor elke run: als de reciproken van de gehele getallen op de schriftregel tot een geheel getal optellen, dan moet dat gehele getal afgedrukt worden, anders moet het enkele woord 'nee' afgedrukt worden.

Voorbeeld

invoer	bijbehorende **uitvoer**
5 3 2 3 6 12 2 3 4 5 6 8 9 10 15 18 20 24 36 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ⟵ ↪ 15 16 18 20 21 22 24 26 27 ⟵ ↪ 28 30 33 35 36 42 48 52 54 ⟵ ↪ 55 60 65 66 5 1 2 4 6 21 27 31 155 29 58 87 116 174 23 46 69 ⟵ ↪ 38 17 85 13 26 52 11 33 49 ⟵ ↪ 21 7 75 81 54 18 64 8	1 2 4 nee nee

N.B.: De symbolen ⟵ en ↪ hebben ook hier de betekenis van een "aan elkaar geknoopte" regel, dat wil zeggen: ⟵ + newline + whitespace + ↪ dient als één spatie gelezen te worden. Deze tekens komen dan ook niet in de invoer voor, maar zijn hier slechts gebruikt ter verduidelijking.

Opgave B

Jantje

Jantje, een artistieke kleuter, heeft een opdracht van school gekregen. Hij moet een collage maken door reepjes gekleurd papier op een ondergrond te plakken. Hij heeft daarvoor alleen het stuk papier tot zijn beschikking dat de juffrouw aan hem heeft gegeven. Dit papier bestaat uit een regelmatig rooster, waarbij elk roosterhokje vierkant is en een kleur heeft. Het papier is enkelzijdig bedrukt. Uit dit papier gaat hij een aantal papierstrookjes knippen. Zo'n papierstrookje heeft altijd een breedte van 1 roosterhokje en een lengte van een geheel aantal roosterhokjes.

Jantje is eigenlijk meer technisch dan artistiek en heeft dus twee linkerhanden, wat het knippen er niet gemakkelijker op maakt. Maar Jantje beproeft zijn technische kwaliteiten en wil een uitvinding maken. Deze uitvinding moet voor hem uit het papier van de juffrouw de gewenste papierstrookjes knippen.

Probleem

Omdat Jantje zijn kwaliteiten toch wat overschat heeft, vraagt hij ons het algoritme voor zijn uitvinding te schrijven. Het programma krijgt als invoer het papier van de juffrouw en de gevraagde papierstrookjes die Jantje uitknippen wil.

Als antwoord volstaat of het mogelijk danwel onmogelijk is, om alle gewenste stukjes papier uit te knippen. Het uitknippen kan alleen recht dat wil zeggen horizontaal/verticaal en uit te knippen strookjes mogen elkaar niet overlappen.

Invoer

Deze bestaat uit:

- één regel met daarop een enkele positieve integer: het aantal runs;
- per run:

  1 regel twee integers l, b ($0 \leq l, b \leq 50$) gescheiden door een enkele spatie: respectievelijk lengte en breedte van het papier;

  l regels met b characters *char* (‘a’ $\leq$ *char* $\leq$ ‘z’): het papier van de juffrouw;

  1 regel één integer n ($0 \leq n \leq 20$): het aantal te knippen strookjes papier;

  n regels per regel één strookje papier ($0 \leq$ lengte strookje ≤ 50) dat uitgeknipt dient te worden.

Z.O.Z.

Uitvoer

Per run één regel met daarop: ‘mogelijk’ als Jantje de gewenste strookjes kan uitknippen, danwel ‘onmogelijk’ als dit niet kan.

Voorbeeld

invoer	bijbehorende **uitvoer**
2 8 5 raarm aarwa ardez eopga veisg oedte doend ejury 4 ra ra ra ra 2 3 abc def 3 abc de g	mogelijk onmogelijk

Opgave C

Y2K

We ontkomen er niet aan: het is nog steeds 2000, het jaar dat menig IT-er met vrees aan zag komen, uitzonderingen daargelaten. Alle einde-der-tijden-profeten ten spijt is er (nog) niks interessants gebeurd. Laten we daarom nog maar eens kijken of we iets leuks kunnen doen met data, alsof wij, IT-ers, er nog niet genoeg mee gespeeld hadden.

Probleem

Stel dat men de dag en een datum zonder jaartal gegeven krijgt: wat is het jaar waarin die combinatie het meest recent optrad?

Invoer

Deze bestaat uit:

- één regel met daarop een enkele positieve integer: het aantal runs;
- per run één regel met daarop de volgende items, steeds van elkaar gescheiden door een enkele spatie:

1 integer $\in \{1, \ldots, 7\}$ de standaardrepresentatie van een dagnaam, dus zondag $= 1$, maandag $= 2$, ..., zaterdag $= 7$;

1 integer het dagnummer;

1 integer $\in \{1, \ldots, 12\}$ de standaardrepresentatie van een maandnaam, dus januari $= 1$, februari $= 2$, maart $= 3$, ..., december $= 12$.

In alle gevallen zal de gegeven combinatie geldig zijn en voorkomen in de jaren $1970 \ldots 2000$. Schrikkeljaren zijn die jaren waarvan het jaartal deelbaar is door 4, maar niet door 100, tenzij het jaartal door 400 deelbaar is.

Uitvoer

Per run één regel met daarop: het jaar (in 4 cijfers) waarin de gegeven combinatie van dagnaam, dagnummer en maandnaam voor het laatst optrad, ten opzichte van vandaag.

Z.O.Z.

Voorbeeld

invoer	bijbehorende **uitvoer**
4 3 29 2 1 22 11 7 7 10 6 6 10	2000 1998 1995 2000

Opgave D

Landjes veroveren II

Twee legers –het ene rood, het andere blauw– bevinden zich in een slagveld: een rechthoekig, regelmatig rooster van landjes. In een aantal landjes staat een regiment, bestaande uit een aantal soldaten, van het *blauwe* leger. Het gehele rode leger bevindt zich aanvankelijk in de rode thuisbasis: de linkerbovenhoek. Het rode leger wil de thuisbasis van het blauwe leger dat zich in de rechteronderhoek bevindt, veroveren. Het blauwe leger is wat vredelievender en verdedigt alleen maar.

Er gaat een veldslag uitgevochten worden die verdeeld is in tijdseenheden. Elke tijdseenheid begeeft het rode leger zich óf een land naar rechts (mits het zich niet aan de rechterrand van het slagveld bevindt) of een land naar beneden (mits het zich niet aan de onderrand van het slagveld bevindt).

Als het rode leger een land binnengaat waar een blauw regiment staat, dan wordt er slag geleverd waarbij er (simultaan) verliezen geleden worden in de verhouding 1:1, dat wil zeggen: zolang er nog aan beide kanten soldaten over zijn, leggen één rode soldaat en één blauwe soldaat gelijktijdig het loodje. Als er na afloop van de schermutseling nog soldaten van het rode leger over zijn, dan neemt het rode leger het land in. In alle andere gevallen blijft het restant van het blauwe regiment staan.

De thuisbasis van het blauwe leger is veroverd zodra er minstens één soldaat van het rode leger in die thuisbasis staat. Het rode leger kan diverse routes kiezen om de blauwe basis te veroveren. Sommige routes zullen echter zwaardere verliezen opleveren dan andere.

Probleem

Schrijf een programma dat bepaalt wat het kleinste aantal verliezen is dat het rode leger lijdt in de slag om de blauwe thuisbasis door een optimale route te kiezen.

Z.O.Z.

Invoer

Deze bestaat uit:

- één regel met daarop een positieve integer: het aantal runs;
- per run:

1 regel twee gehele getallen: respectievelijk de hoogte h ($2 \leq h \leq 100$) en de breedte b ($2 \leq b \leq 100$) van het slagveld;

$\mathbf{h}$ regels met b positieve gehele getallen: het aantal soldaten dat zich in elk land bevindt. In de rode thuisbasis is dit de grootte van het rode leger; elders is dit het aantal blauwe soldaten.

Getallen op een regel worden gescheiden door een enkele spatie.

Uitvoer

Voor elke run bestaat de uitvoer uit het aantal rode soldaten dat verloren gaat in de slag als de route met minimale verliezen gekozen wordt.

Voorbeeld

invoer	bijbehorende **uitvoer**
3 4 4 200 10 10 10 20 20 20 10 20 20 20 10 20 20 20 10 4 4 200 10 10 10 10 20 20 10 10 20 20 10 10 10 10 10 4 4 200 101 10 10 10 1000 1000 10 10 1000 1000 10 10 10 100 10	60 60 150

Opgave E

EuroMaat

De vraag die menig gierig student heeft omtrent de invoering van de euro, is of er ook wat aan valt te verdienen. Op een zekere dag verschijnt op de universiteit een EuroMaat, die een bedrag in centen via de PIN-pas kan teruggeven in euro's. Zoals iedereen nu al lang en breed weet, wordt de euro van ons allemaal en komt € $1,00$ overeen met $f\ 2,2037$.

waarde	kleur	lengte (mm)	breedte (mm)
€ 5	grijs	120	62
€ 10	rood	127	67
€ 20	blauw	133	72
€ 50	oranje	140	77
€ 100	groen	147	82
€ 200	geel	153	82
€ 500	paars	160	82

Tabel E.1: EuroBiljetten

waarde	kleur	doorsnee (mm)	dikte (mm)	gewicht (g)	rand
€ 0,01	roodachtig	16,25	1,67	2,3	glad
€ 0,02	roodachtig	18,72	1,67	3,0	glad met groef
€ 0,05	roodachtig	21,75	1,67	3,9	glad
€ 0,10	geelachtig	19,75	1,93	4,1	grove kartels
€ 0,20	geelachtig	22,25	2,14	5,7	glad met inkepingen
€ 0,50	geelachtig	24,25	2,36	7,8	grove kartels
€ 1,00	grijs/geel	23,25	2,33	7,5	onderbroken kartels
€ 2,00	geel/grijs	25,75	2,10	8,5	fijne kartel (+ tekst)

Tabel E.2: EuroMunten

Omdat de planning bij de Munt een beetje achterliep, zijn er nog geen munten van € $0,01$ en € $0,02$. De EuroMaat streeft ernaar om zo weinig mogelijk €-munten en/of €-biljetten (zie bovenstaande tabellen E.2 en E.1 voor een overzicht van alle €-valuta) uit te keren, teneinde zijn oneindig grote interne voorraad zo weinig mogelijk aan te spreken.

Z.O.Z.

Probleem

Gegeven een bedrag in Nederlandse centen, bepaal het aantal munten en/of biljetten dat de EuroMaat zal uitkeren. Tevens dient de winst te worden berekend die de EuroMaat maakt t.o.v. een automaat die Nederlandse biljetten/munten uitkeert. Beide automaten ronden af naar de dichtstbijzijnde stuiver op de gebruikelijke manier, m.a.w.: 0,07 wordt 0,05 en 0,075 wordt 0,10. De Nederlandse automaat keert de opgegeven Nederlandse centen uit in alle bestaande Nederlandse munten en/of biljetten.

Ter verduidelijking: de winst is de som over alle gemaakte transacties van het verschil tussen het bedrag in €-centen wat de EuroMaat uitkeert en het bedrag dat een Nederlandse automaat zou uitkeren, omgerekend naar euro's en afgerond naar de dichtsbijzijndste gehele €-cent, waarbij een getal met een 5 als derde decimaal naar boven wordt afgerond. Bijvoorbeeld: $0,005 \to 0,01$ en $220,395 \to 220,40$.

Invoer

Deze bestaat uit:

- één regel met daarop een enkele positieve integer: het aantal runs;
- per run twee regels met daarop:

  regel 1 één integer t $(1 \leq t \leq 10^4)$: het aantal transacties;

  regel 2 t integers, steeds gescheiden door één enkele spatie: de aantallen Nederlandse centen c $(0 \leq c \leq 10^6)$ van de t transacties.

Uitvoer

Per run één regel met daarop twee integers gescheiden door een enkele spatie:

integer 1 de winst in eurocenten;

integer 2 het totaal aantal biljetten en munten die de EuroMaat teruggegeven heeft na alle t transacties.

Voorbeeld

invoer	bijbehorende **uitvoer**
2 1 220 2 214 205	0 1 -1 8

Opgave F

Pietje

Om zijn studiebeurs iets aan te vullen heeft student Pietje een bijbaantje in een postkamer. Voor de post kan worden weggebracht, moet deze eerst nog met de hand worden gesorteerd. Pietje is één van de postsorteerders die elke ochtend de post verdeelt. Op de vroege ochtend is Pietje over het algemeen niet in topvorm, door het stappen van de vorige nacht. Het komt dan ook regelmatig voor dat Pietje tijdens zijn werk in slaap valt.

Op een gegeven moment valt Pietje voor de zoveelste keer in slaap. Zijn collega's zijn het zat en besluiten Pietje een lesje te leren. Met behulp van postzakken sluiten zij Pietje van de uitgang af. Op een gegeven moment wordt Pietje wakker en vindt zichzelf opgesloten. Pietje kan niet langs een postzak of door een muur heen. Hij vraagt zich af of hij het gebouw nog kan verlaten.

Probleem

Gelukkig heeft Pietje via de Baan Postzak Software (BPS) een overzicht van de locatie van de postzakken in vorm van een rooster. Hij kan zich in één stap één hokje verplaatsen en alleen in de richtingen Noord, Oost, Zuid of West. Helaas kan Pietje maar één postzak tegelijkertijd in zijn kijkrichting vooruit duwen en heeft Pietje niet genoeg conditie om meer dan 10 maal een zak één hokje vooruit te duwen. Kan Pietje uit deze situatie komen?

Invoer

Deze bestaat uit:

- één regel met daarop een enkele positieve integer: het aantal runs;
- per run:

regel 1 twee integers px en py, $(0 \leq px, py \leq 9)$: respectievelijk de horizontale en de verticale coördinaat van Pietje's beginpositie;

regel 2 twee integers ex en ey, $(0 \leq ex, ey \leq 9)$: respectievelijk de horizontale en de verticale coördinaat van de uitgang;

regel 3 twee integers b (x-richting) en h (y-richting), waarbij $(1 \leq b, h \leq 10)$: respectievelijk de breedte en hoogte van de ruimte;

l regels met daarop b characters. De characters zijn: '#' voor een muur, 'x' voor een postzak en een spatie voor een lege doorgang. De linkerbovenhoek heeft coördinaten $(0,0)$, de rechteronderhoek $(9,9)$. Er is gegeven dat Pietje's beginpositie zich op een lege positie bevindt en dat de uitgang zich niet ín een muur bevindt.

Z.O.Z.

Uitvoer

Deze bestaat per run uit daarop: ’mogelijk’ als Pietje het gebouw kan verlaten, ’onmogelijk’ als dit niet mogelijk is.

Voorbeeld

invoer	bijbehorende **uitvoer**
`2`	`onmogelijk`
`1 1`	`mogelijk`
`3 2`	
`5 4`	
`#####`	
`# # #`	
`# # #`	
`#####`	
`1 1`	
`6 3`	
`8 5`	
`########`	
`#  #   #`	
`#x   x #`	
`#  #   #`	
`########`	

Opgave G

Maxima Succubus

Willem-Alexander doet metingen aan een vacuümkamer, welke de vorm van een kubus heeft. Deze kubus is op zijn beurt weer op een regelmatige manier onderverdeeld in kubusvormige cellen. Van elk van deze cellen kan Willem-Alexander de hoeveelheid energie bepalen. Deze kan 0, $+1$ of -1 eenheid energie bedragen.

Probleem

Gegeven de meting aan een kubusvormige vacuümkamer, bepaal de omvang van de grootste subkubus binnen deze kubusvormige vacuümkamer, waarin de totale energie (dat wil zeggen: de som van de energieën in alle cellen van die subkubus) nul is.

Invoer

Deze bestaat uit:

- één regel met daarop een enkele positieve integer: het aantal runs;
- per run:

  1 regel één integer r $(0 \leq r \leq 40)$: het aantal meetpunten langs de ribbe van de kubus;

  $\mathbf{r^2}$ **regels** met r meetwaarden. Dit zijn dus r doorsneden van de kubus, welke in de gegeven volgorde op elkaar gestapeld zijn. Er zijn drie mogelijke meetwaarden, te weten:

  '`+`' één eenheid positieve energie;

  '`-`' één eenheid negatieve energie;

  '`0`' geen energie.

Uitvoer

Per run bestaat de uitvoer uit één regel met daarop een integer die de lengte van de ribben van de maximale subkubus geeft, gemeten in aantal cellen. Als de gevraagde maximale subkubus niet bestaat, wordt de lengte 0 als uitvoer gegeven.

Z.O.Z.

Voorbeeld

invoer	bijbehorende **uitvoer**
3 3 +-+ -+- +-+ -00 0+0 000 -+- --- +++ 4 0--- +-++ --+- +++- ++0- +-++ -+-- +++- ---+ -0++ +++- -+-- ---- +++- -++- -+++ 2 -+ +- -- +-	3 3 0

Opgave H

“It’s a kind of logic”

Op de wijs van “It’s a kind of Magic”, R. Taylor.

De huisgetaltheoreet van de NKP-organisatie is bezig met een (lastig) probleem, waarvoor hij het aantal natuurlijke getallen, kleiner dan een gegeven getal, moet tellen die voldoen aan een conditie als:

> deelbaar door 3 of deelbaar door 7 of (deelbaar door 8 én (deelbaar door 5 of 9)).

De ‘of’ is hierbij de gewone logische ‘of’ (dus geen exclusieve) en de haakjes geven de groepering aan. Zo’n conditie noteert hij als volgt:

$$3 \vee 7 \vee (8 \wedge (5 \vee 9)) \tag{H.1}$$

Deze expressie wil hij transformeren naar eentje van de vorm

$$n_1 \vee n_2 \vee \ldots \vee n_t, \quad \text{waarbij} \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_t \tag{H.2}$$

dus eentje waarbij er alleen logische of-en voorkomen. Met behulp van zo’n vorm kan hij dan wel weer via de inclusie-exclusie-formule zijn gewenste antwoord uitrekenen. Bijvoorbeeld: expressie (H.1) is *logisch* equivalent met:

$$3 \vee 7 \vee 40 \vee 72 \tag{H.3}$$

Omdat het uitrekenen van de inclusie-exclusie-formule een complexiteit heeft die exponentieel is in het aantal getallen in het rijtje t, wil hij t enigszins minimaliseren. In de expressie (H.3) is de term ‘$\vee\ 72$’ bijvoorbeeld redundant. Zulke redundantie wordt voorkomen door te eisen dat:

$$(\forall i : 1 < i \leq t : (\forall j : 1 \leq j < i : n_j \text{ deelt } \textbf{niet } n_i)) \tag{H.4}$$

Expressie (H.1) moet dus uiteindelijk getransformeerd worden tot:

$$3 \vee 7 \vee 40$$

Probleem

Het uitwerken van die expressies is nogal veel werk en aangezien wiskundigen in de regel nogal werkschuw zijn én slecht kunnen hoofdrekenen, wordt jou gevraagd een programma te schrijven om dit probleem op te lossen. De huisgetaltheoreet komt je al wat tegemoet door de expressies van wat extra haakjes te voorzien, dat wil zeggen: in plaats van (H.1) geeft hij je

$$(3 \vee (7 \vee (8 \wedge (5 \vee 9))))$$

Z.O.Z.

Invoer

Deze bestaat uit:

- één regel met daarop een enkele, positieve integer: het aantal runs;
- per run één regel met daarop een enkele instantie van een *Expr* geproduceerd door onderstaande (E)BNF-grammatica:

  Operator ::= $\vee \mid \wedge$
  Expr ::= Getal $\mid$ (Expr Operator Expr)

  Onder een *Getal* verstaan we een positieve integer. Er geldt dat in alle expressies die voldoen aan de gegeven grammatica en logisch equivalent zijn met de gegeven instantie van *Expr*, slechts getallen $\leq 2^{31} - 1$ kunnen voorkomen.

  Voor $\vee$ wordt het ASCII-teken ‘V’ (hoofdletter vee) gebruikt en voor $\wedge$ het teken ‘ˆ’ (het dakje, Shift-6 dus).

Uitvoer

Per run bestaat de uitvoer uit één regel met daarop een rijtje natuurlijke getallen $n_1, \ldots n_t$, steeds gescheiden door een enkele spatie. Dit rijtje moet corresponderen met de normaalvorm (H.2) behorende bij de *Expr* in de invoer en moet voldoen aan conditie (H.4).

Voorbeeld

invoer	bijbehorende **uitvoer**

`2`
`((3V4)^2)`
`((7V(8^(5V9)))V3)`
	`4 6`
	`3 7 40`